Modelowanie informacji niepewnej i nieprecyzyjnej

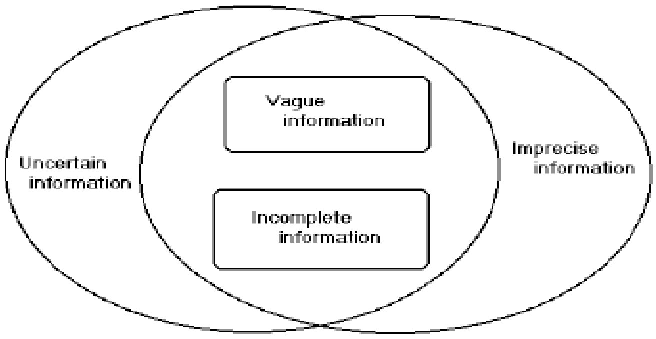
Grzegorz Głowaty

1. Wstęp

W systemach informatycznych mamy do czynienia z wieloma rodzajami informacji. Często informacja dostępna nie jest do końca precyzyjna bądź podana jest z pewnym współczynnikiem informującym o „ufności" w jej prawdziwość. Informacja może różnić się także ze względu na źródło jej pozyskania. Ze względu na powyższe kryteria możemy wyróżnić następujące rodzaje informacji:

Obiektywność informacji:
- subiektywna (zależna od źródła informacji)
- obiektywna

Ze względu na precyzyjność i pewność informacji:
- niepewna (brak pewności prawdziwości stwierdzenia)
- nieprecyzyjna (wartość stwierdzenia nie jest sprecyzowana, może być kilka potencjalnych możliwości)
- informacja niepełna (reprezentowana przez górną granicę stopnia pewności)
- informacja niejednoznaczna (najczęściej powiązana z niejednoznacznościa używanego słownika)



Rys. 1 Rodzaje informacji

Z uwagi na fakt, iż nie istnieje teoria uniwersalna, najlepsza do modelowania wszystkich rodzajów informacji, istnieje szereg teorii, które w lepszym lub gorszym stopniu aplikują się do danego rodzaju przetwarzanej wiedzy.

W nieniejszej pracy przedstawione zostaną skrótowo niektóre z takich teorii. Poczynając od klasycznych podejść takich jak rachunek prawdopodobieństwa, poprzez bazującą na nim teorię Dempstera-Shefera aż do teorii generalizujących teorii zbiorów.

2. Teoria Dempstera-Shafera w kontekście rachunku prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa bazuje na aksjomatycznej definicji miary prawdopodobieństwa zdefiniowanej na przestrzeni rozważanych zdarzeń. Miara ta powinna spełniać następujące własności (1).

$$
\begin{gathered}
P[\varnothing] = 0 \\
0 \leq P[A] \leq 1, \forall A \in 2^{\Theta} \\
P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Siła wyrazu rachunku prawdopodobieństwa pozwala na modelowanie zdarzeń niezależnych (2), a także modelowanie wpływu zajścia jednych zdarzeń na zaistnienie innych (3).

$$P[A \cap B] = P[A]P[B] \tag{2}$$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \tag{3}$$

Teoria Dempstera-Shefera znana pod nazwą evidence theory może być traktowana jako rozszerzenie rachunku prawdopodobieństwa.
W teorii Dempstera-Shefera podzbiorom przestrzeni zdarzeń przypisuje się podstawową miarę prawdopodobieństwa (BPA, ang. Basic Probability Assignement) oznaczaną często *m*.
Zasadanicza różnica pomiędzy rachunkiem prawdopodobieństwa polega na tym, iż miara *m* nie musi być określona na wszystkich elementach przestrzeni zdarzeń a jedynie na niektórych z podzbiorów. Na miarę *m* narzucone są warunki dane wzorem (4).

$$
\begin{gathered}
m(\varnothing) = 0 \\
\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Teoria Dempstera-Shafera daje możliwość wnioskowania nawet wtedy, gdy miara *m* znana jest tylko dla niektórych pozdbiorów przestrzeni zdarzeń. W samej teorii istnieją mechanizmy syntezy informacji z różnych źródel i tworzenia spójnej bazy wiedzy na podstawie różnych (często sprzecznych) informacji. Przykładową metodę syntezy wiedzy obrazuje wzór (5).

$$m(A) = \frac{\sum_{A_i \cap B_j = A} m_1(A_i) m_2(B_j)}{1 - \sum_{A_i \cap B_j = \varnothing} m_1(A_i) m_2(B_j)} \tag{5}$$

Definiuje się także dwie nowe miary (6), miarę przekonania (belief) oraz wiarygodności (plausability).

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$
$$\mathrm{Pl}(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B) \qquad (6)$$

Teoria Dempstera-Shafera znajduje zastosowanie przy modelowaniu wiedzy niepewnej. Można zredukować ją do rachunku prawdopodobieństwa poprzez określenie miary *m* tylko na singletonach będących elementami przestrzeni zdarzeń.

3. Teoria zbiorów przybliżonych

Zbiory przybliżone adresują zagadnienia wiedzy nieprecyzyjnej. Wprowadzone zostają nowe pojęcią (7) górnego i dolnego ograniczenia zbioru. Wprowadzenie tych pojęć pozwala na zastąpienie pojęcia nieprecyzyjnego dwoma pojęciami precyzyjnymi, aczkolwiek niepewnymi.

$$\underline{R}A = \{[\theta]_R | [\theta]_R \subseteq A, \theta \in \Theta\}$$
$$\overline{R}A = \{[\theta]_R | [\theta]_R \cap A \neq \emptyset, \theta \in \Theta\} \qquad (8)$$

Teoria definiuje mnogościowe operacje na ograniczeniach (9)

$$\begin{aligned} \underline{R}(A \cap B) &= \underline{R}A \cap \underline{R}B \\ \overline{R}(A \cap B) &\subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B \\ \underline{R}(A \cup B) &\supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B \\ \overline{R}(A \cup B) &= \overline{R}A \cup \overline{R}B \end{aligned} \qquad (9)$$

W przeszłości starano się także wprowadzić pojęcie stopnia przynależności elementu do zbioru przybliżonego (10). Okazało się jednak, że tak zdefiniowany stopień przynależności nie jest właściwym stopniem przynależności z punktu widzenia zbiorów rozmytych ponieważ nie poddaje się operacjom mnogościowym w spodziewany sposób.

$$\mu_A(\theta) = \begin{cases} 1 & if \;\; \theta \in \underline{R}A \\ 0.5 & if \;\; \theta \in [\overline{R}A - \underline{R}A] \\ 0 & if \;\; \theta \in -\overline{R}A \end{cases} \qquad (10)$$

4. Zbiory rozmyte

Zbiory rozmyte stanowią naturalne rozszerzenie klasycznego pojęcia zbioru. Tak jak w klasycznej teorii zbiorów element przynależy całkowicie bądź nie przynależy wcale do zbioru, tak w teorii zbiorów rozmytych stopień przynależności elementu do zbioru określony jest liczbą rzeczywistą z przedziału [0,1] a samo pojęcie zbioru sprowadza się do pojęcia funkcji określonej na dziedzinie elementów i przyjmującej wartości z przedziału [0,1].

Na tak zdefiniowanych zbiorach możliwe jest określenie teorio-mnogościowych operacji takich jak suma, iloczyn czy dopełnienie zbioru. Teoria zbiorów rozmytych wprowadza całą gamę operatorów (t-normy dla operacji iloczynu oraz s-normy dla operacji sumy) możliwych do wykorzystania do realizacji tych operacji.
Przykładowe definicje sum oraz iloczynów na zbiorach rozmytych podano poniżej:

$$\forall\theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}.\underline{B}}(\theta) = \mu_{\underline{A}}(\theta)\mu_{\underline{B}}(\theta)$$

$$\forall\theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}\cap\underline{B}}(\theta) = \min\{\mu_{\underline{A}}(\theta), \mu_{\underline{B}}(\theta)\}$$

$$\forall\theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}\cup\underline{B}}(\theta) = \max\{\mu_{\underline{A}}(\theta), \mu_{\underline{B}}(\theta)\}$$

$$\forall\theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}\hat{+}\underline{B}}(\theta) = \mu_{\underline{A}}(\theta) + \mu_{\underline{B}}(\theta) - \mu_{\underline{A}}(\theta)\mu_{\underline{B}}(\theta)$$

Teoria zbiorów rozmytych modeluje informację nieprecyzyjną, jednak same elementy przestrzeni są określone precyzyjnie. Nieprecyzyjność modelowana jest na poziomie stopni przynależności elementów do zbiorów rozmytych.

5. Teoria możliwości

Teoria możliwości (ang. Possibility theory) często mylona jest z rachunkiem prawdopodobieństwa. Należy zdać sobie jednak sprawę, że teorie te zajmują się modelowaniem dwóch różnych rodzajów informacji. Ilustruje to dobrze przykład przytoczony przez L. Zadeha. W tabeli poniżej zilustrowano zarówno możliwość jak i prawdopodobieństwo zajścia faktów rodzaju: Hans zje na śniadanie N jajek.

θ	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(\theta)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$p(\theta)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

Tabela 1. Przykład Zadeha

Przypisanie zdarzeniu możliwości 1 nie oznacza w żadnym razie faktu, iż jest to zdarzenie pewne. Jednak z tego, iż pewne zdarzenie ma przypisaną możliwość równą 0 możemy wnioskować, iż jego prawdopodobieństwo jest równe 0. W tym sensie miara możliwości nakłada górne ograniczenie na miarę prawodopodobieństwa.

Teoria możliwości definiuje dwie miary, możliwość (possibility) i konieczność (neccessity):

$$\Pi(A) = \sup_{\theta\in A}\{\pi(\theta)\}$$
$$N(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$$

6. Podsumowanie – zależności między teoriami

Istnieje silna zależność między rachunkiem prawdopodobieństwa a teorią Dempstera-Shafera. Jak pokazano powyżej teoria Dempstera-Shafera jest teorią bardziej ogólną, w szczególnych przypadkach redukowalną do rachunku prawdopodobieństwa.

Niektóre własności opisane zbiorami przybliżonymi daje się zamodelować za pomocą teorii Dempstera-Shafera.

$$\mathrm{Bel}(A) = \frac{\mathrm{card}(\underline{R}A)}{\mathrm{card}(\Theta)}$$
$$\mathrm{Pl}(A) = \frac{\mathrm{card}(\overline{R}A)}{\mathrm{card}(\Theta)}$$

Zależność, jaka istnieję pomiędzy funckją przynależności zdefiniowaną we wzorze (10) a funkcją przynależności dla zbiorów rozmytych jest jedynie pozorna i nie pozwala operować na pojęciach z teorii zbiorów przybliżonych z łatwością przy pomocy mechanizmów teorii zbiorów rozmytych.

Podobnie dla teorii możliwości i rachunku prawdopodobieństwa – nie ma jednoznacznego przełożenia tych teorii.
Jednakże Zadeh definiuje funkcję określającą możliwość jako funkcję reprezentującą stopień przynależności do zbioru rozmytego opisującego zdarzenie. W ten sposób do modelowania funkcji możliwości można użyć aparatu zbiorów rozmytych.

Modelowanie informacji niepewnej i nieprecyzyjnej

Grzegorz Głowaty

Plan referatu

- Informacja niepewna i nieprecyzyjna
- Rachunek prawdopodobieństwa
- Teoria Dempstera-Shafera (evidence theory)
- Zbiory przybliżone (rough sets)
- Zbiory rozmyte (fuzzy sets)
- Teoria możliwości (possibility theory)
- Relacje między teoriami

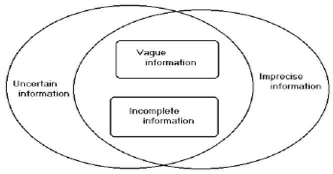
Niepewność a nieprecyzyjność informacji

Obiektywność informacji:

- subiektywna (zależna od źródła informacji)
- obiektywna

Precyzyjność informacji:

- niepewna (brak pewności prawdziwości stwierdzenia)
- nieprecyzyjna (wartość stwierdzenia nie jest sprecyzowana, może być kilka potencjalnych możliwości)
- informacja niepełna (reprezentowana przez górną granicę stopnia pewności)
- informacja niejednoznaczna (najczęściej powiązana z niejednoznacznością używanego słownika)



Rachunek prawdopodobieństwa

- Modelowanie zdarzeń niezależnych

$$P[\varnothing] = 0$$
$$0 \le P[A] \le 1, \forall A \in 2^{\Theta}$$
$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

- Modelowanie wpływu zdarzeń na inne zdarzenia

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]$$
$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

- Modelowanie ignorancji

$$P[\theta_1] = P[\theta_2] = \dots = P[\theta_n] = \frac{1}{n} = \frac{1}{\mathrm{card}(\Theta)}$$

Teoria Dempstera-Shafera

$$m(\varnothing) = 0$$
$$\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$$

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$
$$\mathrm{Pl}(A) = \sum_{A \cap B \neq \varnothing} m(B)$$

$$m(A) = \frac{\sum_{A_i \cap B_j = A} m_1(A_i) m_2(B_j)}{1 - \sum_{A_i \cap B_j = \varnothing} m_1(A_i) m_2(B_j)}$$

- Przestrzeń, na której operuje teoria Dempstera-Shafera to zbiór wszystkich pozdbiorów przestrzeni zdarzeń (przez co łatwiej radzimy sobie z nieprecyzyjnością)
- Redukcja do rachunku prawdopodobieństwa następuje poprzez określenie miary *m* tylko na singletonach
- Dochodzą dwie nowe miary (belief i plausibility)
- Łączenie informacji z różnych źródeł

Zbiory przybliżone

- Teoria zbiorów przybliżonych ma za zadanie ułatwić przetwarzanie wiedzy nieprecyzyjnej
- Pojęcia dolnego i górnego ograniczenia, które pozwala operować zamiast na informacji nieprecyzyjnej, na parze informacji precyzyjnych, ale niepewnych

$$\underline{R}A = \{[\theta]_R | [\theta]_R \subseteq A, \theta \in \Theta\}$$
$$\overline{R}A = \{[\theta]_R | [\theta]_R \cap A \neq \emptyset, \theta \in \Theta\}$$

$$\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B$$
$$\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B$$
$$\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B$$
$$\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B$$

$$\mu_A(\theta) = \begin{cases} 1 & if\ \ \theta \in \underline{R}A \\ 0.5 & if\ \ \theta \in [\overline{R}A - \underline{R}A] \\ 0 & if\ \ \theta \in -\overline{R}A \end{cases}$$

Zbiory rozmyte

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mu_A(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}.\underline{B}}(\theta) = \mu_{\underline{A}}(\theta)\mu_{\underline{B}}(\theta)$$

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}\cap\underline{B}}(\theta) = \min\{\mu_{\underline{A}}(\theta), \mu_{\underline{B}}(\theta)\}$$

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}\cup\underline{B}}(\theta) = \max\{\mu_{\underline{A}}(\theta), \mu_{\underline{B}}(\theta)\}$$

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mu_{\underline{A}\hat{+}\underline{B}}(\theta) = \mu_{\underline{A}}(\theta) + \mu_{\underline{B}}(\theta) - \mu_{\underline{A}}(\theta)\mu_{\underline{B}}(\theta)$$

- Przynależność elementów do zbioru jest niepewna. Jest to generalizacja klasycznej teorii zbiorów.
- Elementy przestrzeni nie odgrywają roli informacji nieprecyzyjnej, tę rolę w teorii zbiorów rozmytych odgrywają stopnie przynależności
- Teoria zbiorów rozmytych pozwala na definiowanie różnych (algebraicznie) operatorów, które można dostosowywać do interpretacji znaczenia „rozmytości”

Teoria możliwości

- Przypisanie do każdego zdarzenia przestrzeni możliwości jego zajścia
- Różnica pomiędzy prawdopodobieństwem: możliwość = 1 nie oznacza zdarzenia pewnego
- Kiedy nie jesteśmy w stanie przypisać dokładnych możliwości, teoria zajmuje się relacjami pomiędzy określonymi możliwościami
- Dwie miary (możliwość i konieczność)
- Możliwość kombinowania wiedzy z wielu źródeł (wiele sposobów)

$$\Pi(A) = \sup_{\theta \in A}\{\pi(\theta)\}$$

$$N(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$$

Połączenia między teoriami

- Prawdopodobieństwo a teoria Dempstera-Shafera
- Teoria Dempstera-Shafera a zbiory przybliżone
- Zbiory rozmyte a teoria możliwości
- Teoria możliwości a rachunek prawdopodobieństwa (przykład Zadeha)
- Zbiory przybliżone a zbiory rozmyte (pozorne podobieństwo)

$$P[X = \theta] = m(\theta) = \mathrm{Bel}(\theta) = \mathrm{Pl}(\theta) \quad \forall \ \theta \in \Theta$$

$$P[X = \theta] = \sum_{\theta \in A} \frac{m(A)}{\mathrm{card}(A)} \quad \forall \theta \in \Theta$$

$$\mathrm{Bel}(A) = \frac{\mathrm{card}(\underline{R}A)}{\mathrm{card}(\Theta)}$$

$$\mathrm{Pl}(A) = \frac{\mathrm{card}(\overline{R}A)}{\mathrm{card}(\Theta)}$$

$$\mu_{\underline{A}}(\theta) = \pi_X(\theta)$$

θ	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(\theta)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$p(\theta)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

$$\mu_A(\theta) = \begin{cases} 1 & if \ \ \theta \in \underline{R}A \\ 0.5 & if \ \ \theta \in [\overline{R}A - \underline{R}A] \\ 0 & if \ \ \theta \in -\overline{R}A \end{cases}$$

Referencje

- Mihai C. Floreaa, Anne-Laure Jousselmeb, Dominic Greniera and Eloi Bosse – An unified approach to the fusion of imperfect data?, Universite Laval
- Z. Pawlak, Rough Sets - Theorical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publisher, 1991
- L. A. Zadeh, Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems 1, pp. 3-28, 1978